

# תחומי קעירות ונקודות פיתול

## דף עבודה – שאלון 571



היעזרו ביישומון

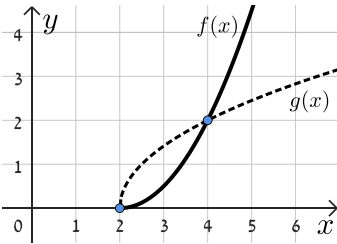


שלכם, צפו בסרטון



לאחר שתתחברו לחשבון

וענו על השאלות הבאות:



- 1) לפניכם גרפים של הפונקציות:  $f(x)$  ו- $g(x)$ .  
הפונקציות הן חיוביות, עולות ונחתכות בשתי נקודות.  
מה ההבדלים בניהן?

- 2) היעזרו ביישומון והשלימו את המשפטים הבאים בעזרת מחסן המילים:

תלול, מעל, מתון, יורדת, מתחת, עולה, קטן, גדול, חיובית, שלילית.

א. המשיקים ל- $f(x)$  נמצאים \_\_\_\_\_ לגרף הפונקציה, והמשיקים ל- $g(x)$  נמצאים \_\_\_\_\_ לגרף הפונקציה.

ב. ככל ש- $x$  גדל, גרף הפונקציה  $f(x)$  נעשה \_\_\_\_\_ וגרף הפונקציה  $g(x)$  נעשה \_\_\_\_\_.

ג. ככל ש- $x$  גדל, שיפוע הפונקציה  $f(x)$  הולך ונעשה \_\_\_\_\_ יותר ואילו שיפוע

הפונקציה  $g(x)$  נעשה \_\_\_\_\_ יותר.

ד. הנגזרת  $f'(x)$  היא פונקציה \_\_\_\_\_ ואילו הנגזרת  $g'(x)$  היא פונקציה \_\_\_\_\_.

ה. הנגזרת השנייה  $f''(x)$  היא \_\_\_\_\_ ואילו הנגזרת השנייה  $g''(x)$  היא \_\_\_\_\_.

### הגדרה:

פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מעלה  $\cup$  בתחום מסוים, אם המשיק לפונקציה נמצא מתחת גרף הפונקציה לכל  $x$  בתחום.

פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה  $\cap$  בתחום מסוים, אם המשיק לפונקציה נמצא מעל גרף הפונקציה לכל  $x$  בתחום.

### משפט:

בתחום בו  $f''(x) > 0$  הפונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מעלה  $\cup$ .

בתחום בו  $f''(x) < 0$  הפונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה  $\cap$ .

תזכורת:  $f''(x)$  היא הנגזרת של  $f'(x)$  והיא מתארת את קצב השינוי של  $f'(x)$ .



3 בטבלה שלפניכם גרפים של שלוש פונקציות. העזרו ביישומון ורשמו את תחומי הקעירות של הפונקציות. במידה ואין כתבו לא קיים.

|  |  |  |                        |
|--|--|--|------------------------|
|  |  |  | הפונקציה               |
|  |  |  | תחומי קעירות כלפי מעלה |
|  |  |  | תחומי קעירות כלפי מטה  |

### הגדרה:

נקודת פיתול היא נקודה שבה פונקציה רציפה מחליפה את כיוון הקעירות שלה (עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה או להפך).

$x_0$  - לא נקודת פיתול

$x_0$  - נקודת פיתול

$x_0$  - נקודת פיתול

| $x$      | $x < x_0$ | $x_0$ | $x > x_0$ |
|----------|-----------|-------|-----------|
| $f(x)$   | U         |       | U         |
| $f''(x)$ | +         | 0     | +         |

| $x$      | $x < x_0$ | $x_0$ | $x > x_0$ |
|----------|-----------|-------|-----------|
| $f(x)$   | ∩         |       | U         |
| $f''(x)$ | -         | 0     | +         |

| $x$      | $x < x_0$ | $x_0$ | $x > x_0$ |
|----------|-----------|-------|-----------|
| $f(x)$   | U         |       | ∩         |
| $f''(x)$ | +         | 0     | -         |

4 ציינו ביחס לכל טענה האם היא נכונה או לא, במידה והטענה לא נכונה תקנו אותה וכתבו את הטענה הנכונה.

א. אם  $x_0$  היא נקודת פיתול של  $f(x)$  אז  $f''(x_0) = 0$

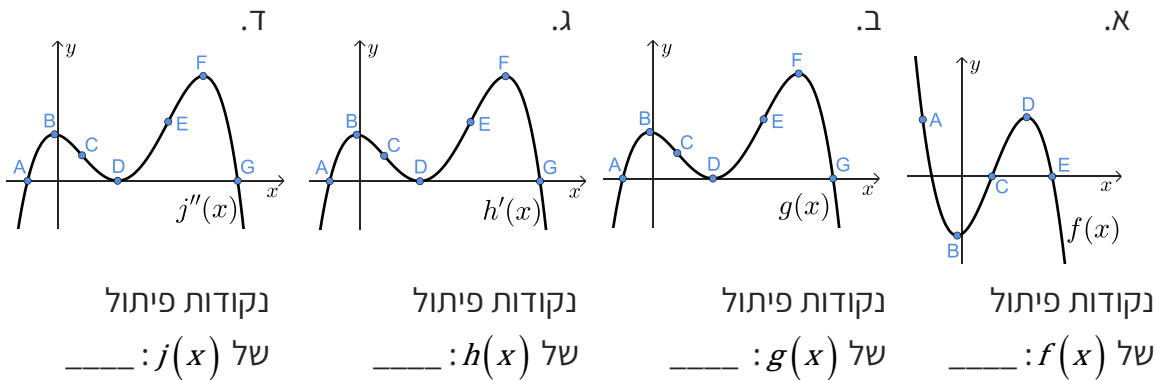
ב. נקודות ההשקה של  $f''(x)$  עם ציר ה- $x$  הן נקודות פיתול של  $f(x)$ .

ג. בתחום בו פונקציית הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  עולה, הפונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה.

ד. נקודת קיצון בפונקציית הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  היא נקודת פיתול של  $f(x)$ .

ה. אם:  $f''(x_0) = 0$  אז  $x_0$  נקודת פיתול של  $f(x)$ .

(5) בכל אחד מהגרפים הבאים קבעו אילו נקודות מסמנות את נקודות הפיתול של הפונקציה.  
(שימו לב שגרפים ג' ו-ד' מתארים גרפים של פונקציית נגזרת).



### תזכורת - מציאת נקודות פיתול:

- מוצאים את הנקודות עבורן הנגזרת השנייה מתאפסת  $f''(x) = 0$ .
- עבור כל אחת מהנקודות שמצאנו בודקים אם היא נקודת פיתול (נקודה שבה הנגזרת השנייה משנה את הסימן שלה היא נקודת פיתול).

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^5 + x^4 + 2x - 5$ .  
לגבי כל אחת מהטענות כתבו האם היא נכונה או לא. נמקו את תשובתכם.  
א. פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  חותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות.  
ב. ל- $f(x)$  יש נקודת פיתול אחת בלבד.

(7) נתונה פונקציית הנגזרת:  $g'(x) = x^2 - 4$ .  
לגבי כל אחת מהטענות כתבו האם היא נכונה או לא. נמקו את תשובתכם.  
א. לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.  
ב. ל- $g(x)$  יש נקודות פיתול אחת בלבד.  
ג. הפונקציה  $g(x)$  קעורה כלפי מעלה לכל ערך של  $x$ .

(8) שאלות לתרגול נוסף עם פתרונות מלאים מתוך גול: [שאלה 1](#), [שאלה 2](#), [שאלה 3](#).



## תשובות סופיות:

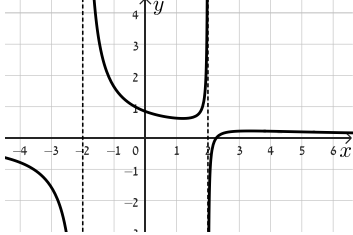
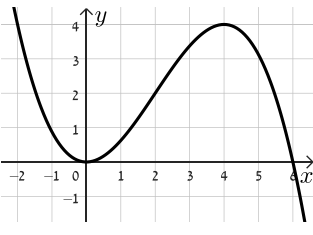
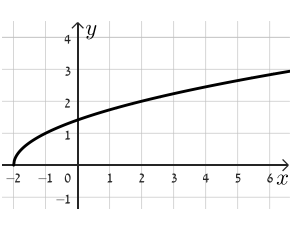
(1) ב-  $f(x)$  שיפוע המשיק הוא חיובי והולך וגדל, בעוד שב-  $g(x)$  שיפוע המשיק הוא חיובי

אך הולך וקטן.

(2) א. מתחת, מעל. ב. תלול, מתון. ג. גדול, קטן. ד. עולה, יורדת.

ה. חיובית, שלילית.

(3) להלן הטבלה המלאה:

| הפונקציה               |  |  |  |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| תחומי קעירות כלפי מעלה | $-2 < x < 2$                                                                      | $x < 2$                                                                           | אין                                                                                |
| תחומי קעירות כלפי מטה  | $x < -2$ , $x > 2$                                                                | $x > 2$                                                                           | $x > -2$                                                                           |

(4) א. נכון. ב. לא נכון: בנקודת השקה של  $f''(x)$  עם ציר ה-  $x$  סימן הנגזרת השנייה לא

משתנה ולכן לא מדובר בנקודת פיתול עבור  $f(x)$ .

ג. לא נכון: הפונקציה  $f(x)$  תהיה קעורה כלפי מעלה.

ד. נכון.

ה. לא נכון: למשל הפונקציה:  $f(x) = x^4$  מקיימת:  $f''(0) = 0$  אך  $(0,0)$  היא נקודת מינימום.

(5) א. נק' פיתול: C ב. נק' פיתול: C, E ג. נק' פיתול: B, D, F ד. נק' פיתול: A, G

(6) א. נכון. ב. נכון.

(7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. לא נכון.